Analiza matematyczna I
Lista 1 (powtórka ze szkoły)

Zad 1. Dla podanych zbiorów A, B wyznaczyć $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$.

a) A - zbiór studentów pierwszego roku informatyki, B - zbiór wszystkich studentów informatyki,

b) $A = [2, 5)$, $B = [3, 7]$, c) $A = (0, 10]$, $B = \mathbb{R}$, d) $A = (0, 10]$, $B = \mathbb{N}$,

e) $A = \{1, \frac{3}{4}, 8, \sqrt{3}\}$, $B = (2, 8)$, f) $A = \mathbb{Z}$, $B = \{1, -\frac{12}{4}, -8, \frac{11}{14562}, \sqrt{7}\}$,

h) $A = \mathbb{Q}$, $B = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, ...\}$, i) A - zbiór krzeseł w sali 302, $B = \emptyset$,

j) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 \leq 3\}$,

k) A prosta o równaniu $y = 2x - 1$, B prosta o równaniu $y = 1 - x$.

Zad 2. Sprawdzić prawdziwość podanych wzorów (podać dowód lub kontrprzykład):

a) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$, b) $A' \cup B' = (A \cup B)'$

c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$, d) $(A \cup B) \cap C = A \cap C \cup B \cap C$.

Zad 3. Rozwiązać równania i nierówności modułowe

a) $|x + 1| = 3$, b) $|x + 1| + 2|2x - 1| = 5$, c) $|x^2 - 7x + 8| = 2$

d) $|3x| + 2 \leq |x - 6|$, , e) $|\frac{2x-1}{x+2}| < 2$, f) $|x^2 - 25| \leq 24$.

Zad 4. Naszkicować wykres funkcji f danej wzorem

a) $f(x) = |x + 1| + |2x + 4| - |3x + 9|$, b) $f(x) = |x - 1| + |x + 4|$.

Zad 5. Sprawdzić, czy jest prawdą, że dla wszystkich liczb rzeczywistych zachodzi nierówność:

a) $x \leq |x|$, b) $-x \leq x$, c) $1 \leq |1 + x| + x$, d) $-1 \leq |-1 + x| + x$,

e) $1 \leq |1 - x| + x$, f) $-1 \leq |-1 - x| + x$, g) $-x \leq |-x + 1| + 1$.

Zad 6. Obliczyć sumy postępów arytmetycznych i geometrycznych:

a) $\frac{1}{3} + 1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3} + ... + 103$, b) $4 + 6 + 9 + ... \frac{3^{100}}{2^{98}}$, c) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^{100}}$,

d) $7 + 9 + 11 + 13 + ... + (6n + 1)$, e) $5 + 15 + 25 + 35 + ... + (100n + 55)$,

f) $5 + 8 + 11 + 14 + ... + 101$, g) $-17 - 13 - 9 + ... + 99$,

h) $1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + 4 + ... + 2^n$.

Zad 7. Obliczyć sumę $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 8 \cdot 9 + ... + 2^n \cdot (2^n + 1)$.

Zad 8. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego $\{a_n\}$ wyraża się wzorem $S_n = -n^2 + 12n$, $n \geq 1$. Wyznaczyć liczbę n, dla której $a_n = 0$.

Zad 9. Dany jest niemonotoniczny ciąg geometryczny, w którym $a_1 = 12$, $a_3 = 27$. Wyznaczyć iloraz tego ciagu.

Zad 10. Wykazać, że jeżeli $\{a_n\}$ jest nieskończonym ciągiem arytmetycznym, to ciąg $\{b_n\}$ o wyrazie ogólnym określonym wzorem $b_n = a_n + 2a_{n+1} + 4a_{n+2}$ też jest ciągiem arytmetycznym

Zad 11. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wyraża się wzorem $S_n = 2n^2 + n$ dla $n \geq 1$. Obliczyć sumę 50 początkowych wyrazów tego ciągu o numerach parzystych: $a_2 + a_4 + ... + a_{100}$.

Zad 12. Liczby x, $2x + 1$, $x + 8$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o wyrazach całkowitych. Obliczyć x.